

УДК 629.423.1.004.68

Д-р техн. наук, проф. Л. А. МУГИНШТЕЙН, д-р техн. наук А. Е. ИЛЮТОВИЧ,  
канд. техн. наук И. А. ЯБКО

## Энергооптимальный тяговый расчет движения поезда

**Аннотация.** Оптимизация режимов управления поездом является одной из важнейших мер по актуальной в настоящее время проблеме экономии топливно-энергетических ресурсов на тягу поездов. В статье представлены математическая модель и метод энергооптимального тягового расчета на заданное время хода между двумя пунктами с учетом плана и профиля пути, длины состава, характеристик вагонов, тяговых и тормозных характеристик локомотива и ограничений скорости движения. Как показал анализ экспериментальных данных, полученных как в ходе специально организованных опытных поездок на участках переменного и постоянного тока, так и в сравнительных опытных поездках, проходивших в реальных условиях пропуска поездопотока, этот метод обеспечивает существенную экономию энергии на тягу поездов.

Рассмотренные в статье методы расчета энергооптимальных траекторий движения поезда и алгоритмы по эффективности, надежности и универсальности удовлетворяют повышенным требованиям, вплоть до требований бортовых систем управления движением поездов, когда их расчет и реализация осуществляются в режиме реального времени в зависимости от изменений условий пропуска поездопотока.

Рассмотрена организация работы программного продукта для ЭВМ, созданного на основе разработанных алгоритмов расчета энергооптимальных траекторий движения поездов. В настоящее время этот продукт получил широкое распространение на сети железных дорог РФ и используется для обучения машинистов приемам энергосберегающего управления движением поезда, для нормирования расхода топлива на тягу с учетом реальных условий пропуска поездопотоков, для разработки режимных карт, в системах автоматического управления движением поездов.

**Ключевые слова:** оптимальность; тяговый расчет; расход энергии на тягу; алгоритм; функционал энергии; программа для ЭВМ

**Введение.** Одним из важнейших показателей качества выполнения поездной работы на железных дорогах являются удельные расходы топливно-энергетических ресурсов (ТЭР) на тягу поездов. Эти величины в значительной степени определяются выбором рациональных режимов управления движением с учетом массы и длины поездов, плана и профиля пути, условий пропуска поездопотока, тяговых и тормозных характеристик локомотивов, данных о сопротивлении движению вагонов и, что особенно важно, с учетом заданного времени хода поезда на перегоне, участке или направлении железной дороги.

Общепринятый на железных дорогах тяговый расчет основывается на решении дифференциальных уравнений движения поезда

$$\begin{cases} \frac{ds(t)}{dt} = v(t); \\ m \frac{dv(t)}{dt} = F(t) - B(t) - W(s(t), v(t)); \\ s(0) = 0, v(0) = v_0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $m$  — масса поезда;  $t$ ,  $s(t)$ ,  $v(t)$  — время, пройденный путь и скорость соответственно;  $S$  — длина участка,  $v_0$  — заданная скорость в начале участка;  $F(t)$  — сила тяги локомотива;  $B(t)$  — сила торможения состава;  $W(s(t), v(t))$  — сила сопротивления движению. Время движения поезда из начального пункта в конечный определяется реализуемыми силами тяги и торможения. На практике при выполнении тяговых расчетов широко используется так называемый расчет на минимум времени хода. При этом в правую часть второго из уравнений (1) подставляются максимальные значения сил тяги и торможения, которые на рассматриваемом участке пути могут быть реализованы локомотивом и тормозами поезда. В результате определяются максимальная скорость движения поезда и соответствующее минимальное время хода  $T_{\min}$ , при которых расход ТЭР на тягу поезда достигает максимума.

Если заданное время хода  $T$  превышает минимально возможное —  $T_{\min}$ , то выполнение заданного времени хода может быть обеспечено любым из множества сочетаний сил тяги и торможения, не превышающих максимальных значений. На практике используется метод подбора приемлемых значений  $F(t)$  и  $B(t)$  путем выполнения пошаговых вариантных расчетов с помощью уравнений (1) до тех пор, пока расчетные значения времени хода не приблизятся к заданному.

Поскольку выбор режимов  $F(t)$  и  $B(t)$  и их реализация на практике машинистами существенно неоднозначны и сопровождаются в ряде случаев повышенным расходом энергии на тягу поездов, естественным образом возникает задача определения среди множества допустимых режимов управления поездом таких, которые обеспечили бы выполнение заданных условий движения поезда при минимальном расходе энергии на тягу.

С учетом этого в развитие и дополнение традиционного тягового расчета (1) ставится задача разработки нового энергооптимального тягового расчета — ЭТР с

целью определения режимов управления движением поезда между начальным и конечным пунктами участка за заданное время, с минимальным расходом энергии на тягу и с учетом плана и профиля пути, длины состава, типа и загруженности вагонов, тяговых и тормозных характеристик локомотива, ограничений скорости движения.

В общем виде интересующие нас параметры поезда, профиля пути, условий движения, заданное время хода, расход энергии на тягу определяют систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{ds(t)}{dt} = v(t), \\ m \frac{dv(t)}{dt} = F(t) - B(t) - W(s(t), v(t)), 0 \leq t \leq T, \\ s(0) = 0, s(T) = S, v(0) = v_0, v(T) = v_1, \\ A(T) \rightarrow \min. \end{cases} \quad (2)$$

В системе (2) по сравнению с системой (1) имеют дополнительные члены:  $T$  — заданное время хода,  $S$  и  $v_1$  — длина пути и конечная скорость,  $A(T)$  — расход энергии на прохождение поездом участка пути длиной  $S$ .

Решение этой системы обеспечивает в каждом конкретном случае получение зависимостей  $F(s)$  и  $B(s)$ , при реализации которых в ручном или автоматизированном режиме управления поезд движется со скоростью  $v(s)$ . При этом будут выполнены все определенные в (2) условия и обеспечен минимальный расход энергии на тягу поезда

$$\int_0^T F(t)v(t)dt \rightarrow \min. \quad (3)$$

Далее рассмотрены результаты теоретических исследований и практических разработок, выполненных во ВНИИЖТе в период с 1991 г. с использованием еще более ранних результатов исследований А. Е. Илютовича, нашедших широкое применение на железных дорогах России. Разработанные методы расчета энергооптимальных траекторий движения поезда и алгоритмы по эффективности, надежности и универсальности удовлетворяют повышенным требованиям, вплоть до требований бортовых систем управления движением поездов, когда их расчет и реализация осуществляются в режиме реального времени в зависимости от меняющихся условий пропуска поездопотока.

**Известные подходы к решению задачи оптимального управления движением поезда.** Одной из первых формальных постановок задачи об энергетически оптимальном управлении движением поезда принято считать работу [1]. В работах [2–5] задача оптимизации сводится к задаче конечномерной оптимизации относительно набора параметров — моментов переключения с одного режима движения на другой.

Наиболее полное исследование структуры оптимальной траектории стало возможным благодаря применению принципа максимума Л. С. Понтрягина и его дальнейших обобщений, полученных в трудах А. А. Милютина и его учеников. В работе [6] дается описание оптимальных последовательностей режимов: тяга, выбег, торможение, движение с постоянной скоростью, с так называемой скоростью стабилизации, а также условий существования и условий перехода с одного режима на другой. Применение принципа максимума привело к появлению ряда работ, где оптимальное управление определяется из системы уравнений и неравенств, используемых в формулировке принципа максимума [7–10]. Задача оптимального управления в этих работах при некоторых дополнительных предположениях, позволяющих восстановить последовательность режимов на оптимальном решении, сводится к вычислению конечного набора параметров — моментов переключения режимов.

В настоящее время получил развитие и другой подход, в котором задача оптимального управления в системе (1) — (3) сводится к конечномерной задаче математического программирования большой размерности с непрерывными и целочисленными переменными [11]. Очевидные вычислительные трудности, связанные с решением такой задачи, судя по приведенным в [11] результатам, преодолеваются лишь благодаря высокой эффективности самых современных вычислительных средств.

В основе рассматриваемой в данной статье методики, разработанной во ВНИИЖТе [12–14], лежит, как и в упоминавшихся выше работах, современный принцип максимума [15,16]. Однако в отличие от вышперечисленных работ при расчетах используется метод последовательных приближений, в котором на каждом шаге вычислительного процесса строится допустимое приближенное решение задачи с расходом энергии меньшим, чем на предыдущем шаге. Это дает возможность остановки процесса вычислений, как только расход энергии на полученном шаге приближения станет близким к оптимальному с приемлемой точностью. При этом в отличие от работ [8–10], в которых фиксируется последовательность режимов, в рассматриваемом методе последовательность режимов определяется в процессе вычислений. Это обеспечивает универсальность метода и возможность его использования без введения дополнительных допущений на участках пути с самыми сложными сочетаниями крутых подъемов и спусков, на участках с кривыми малого радиуса, ограничениями скорости движения поезда. Обычно даже опытные специалисты по тяговым расчетам и опытные машинисты не могут представить заранее сочетание режимов и их продолжительность при оптимальном управлении движением поезда.

**Математическая постановка задачи.** Задача состоит в определении режимов управления безостановочным движением поезда по участку между начальным и конечным пунктами за заданное время, обеспечивающих минимальный расход энергии на тягу с учетом плана и профиля пути, длины состава, типа и загрузки вагонов, тяговых и тормозных характеристик локомотива, ограничений скорости движения.

Началом решения является поиск исходного допустимого режима управления движением, наиболее близко удовлетворяющего всем условиям и ограничениям задачи. При этом используется алгоритм, основанный на регулировании времени хода, а затем — собственно оптимизационный алгоритм последовательного улучшения исходного приближения по расходу энергии. То есть на каждом шаге итерационного процесса строится удовлетворяющая всем условиям и ограничениям задачи траектория движения, при реализации которой расход энергии меньше, чем при реализации траектории, рассчитанной на предыдущем шаге.

Для удобства вычислений и компактности записи выполняемых преобразований далее воспользуемся формой записи задачи оптимального управления, широко используемой в работах по исследованию движения поезда [17, 18], которая эквивалентна системе (1) — (3). В этой постановке независимой переменной является пройденный поездом путь  $s$ , а фазовыми переменными:  $J(s)$  — затраты ТЭР,  $t$  — время,  $K(s)$  — квадрат скорости, которому пропорциональна кинетическая энергия поезда. Силы тяги, торможения и сопротивления движению принимаются в расчете на единицу массы поезда с учетом инерции вращающихся масс:

$$\frac{dJ(s)}{ds} = u_T(s)U_{T_{\max}}(K(s)); \quad (4)$$

$$\frac{dt(s)}{ds} = \frac{1}{[K(s)]^2}; \quad (5)$$

$$\frac{dK(s)}{ds} = 2[-W(s, K(s)) + u_T(s)U_{T_{\max}}(K(s)) - u_B(s)U_{B_{\max}}(K(s))]; \quad (6)$$

$$J(0) = 0, t(0) = 0, K(0) = K_0; \quad (7)$$

$$t(S) = T, K(S) = K_T, 0 \leq s \leq S. \quad (8)$$

Здесь  $S$  — длина рассматриваемого участка пути;  $T$  — заданное время хода;  $K_T$  отвечает значению  $s = S$ ;  $u_T(s)$ ,  $u_B(s)$  — управления, являющиеся безразмерными величинами, определяемыми отношениями величин сил тяги и торможения к максимально возможному значениям  $U_{T_{\max}}(K(s))$  и  $U_{B_{\max}}(K(s))$  соответственно.

С учетом этого очевидны соотношения

$$0 \leq u_T(s) \leq 1, 0 \leq u_B(s) \leq 1; \quad (9)$$

$U_{T_{\max}}(K(s))$  и  $U_{B_{\max}}(K(s))$  — дифференцируемые по  $K$  функции;  $W(s, K(s))$  — величина, пропорциональная сумме основного и дополнительного сопротивлений движению;  $W(s, K(s))$  — монотонно возрастающая, дифференцируемая по  $K$  функция. На основании физических представлений об ограничениях скорости движения поездов естественно соотношение для  $K(s)$

$$0 < K(s) \leq E(s), \quad (10)$$

где  $E(s)$  — кусочно-постоянная функция пути.

При принятых обозначениях задача определения оптимального управления движением поезда формулируется следующим образом: для поезда, движение которого описывается соотношениями (4) — (10), найти допустимые управления  $u_T(s)$ ,  $u_B(s)$  и также соответствующую им траекторию движения  $t(s)$  и  $K(s)$ , чтобы обеспечивался минимальный расход энергии на движение поезда — минимальное значение функционала  $I$ :

$$I = J(S) \Rightarrow \min. \quad (11)$$

#### Определение структуры оптимальной траектории.

При движении поезда выполняется работа по преодолению сил сопротивления движению, и при этом происходит изменение его кинетической и потенциальной энергии. При нерациональном управлении движением поезда накапливается избыточная кинетическая энергия, которая погашается при его подтормаживании или остановке. При рациональном управлении тягой затраты энергии на обеспечение движения поезда меньше за счет увеличения времени перемещения поезда на выбеге. Соответственно, избыток потенциальной энергии обеспечивает возможность движения поезда по инерции с большей скоростью на крутом уклоне. Очевидно, что чем на большем числе отрезков пути движение поезда будет происходить по инерции, тем меньше потребуется расхода ТЭР на тягу.

Известно, что при умелом использовании накопленной кинетической энергии в процессе движения для преодоления крутых подъемов целесообразно заранее разогнать поезд и таким образом на подъеме снизить нагрузку на локомотив. Это согласуется со здравым смыслом и практически реализуется с известной степенью приближения квалифицированными машинистами. Однако энергооптимизация траектории движения в отдельных локальных местах в совокупности не обеспечивает выполнение заданных времени хода и скорости движения в конце пути. Только расчет всей траектории движения поезда в целом на заданном участке пути в соответствии с (4) — (11) обеспечит выполнение всех заданных ограничений по общему времени движения, скорости поезда, силам тяги и торможения.

Результаты теоретических исследований [6, 7] энергооптимальных траекторий движения поезда

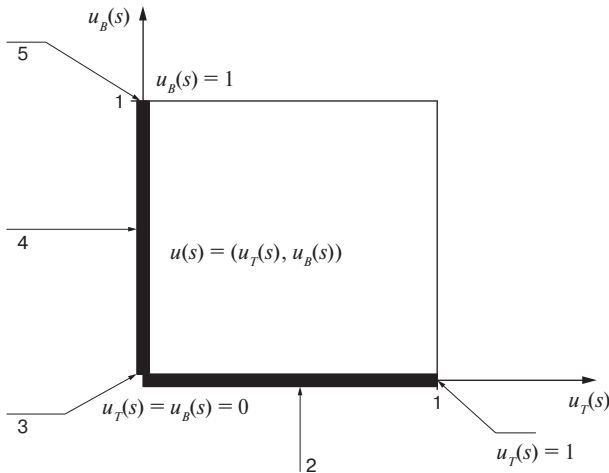


Рис. 1. Схематичное представление пяти возможных управлений режимами тяги и торможения поезда на энергооптимальной траектории

показали, что оптимальная траектория представляет собой последовательное сочетание режимов тяги и торможения пяти возможных типов: движение с максимальной силой тяги (разгон); движение в режиме тяги с постоянной скоростью — либо со скоростью стабилизации, либо с максимально допустимой на данном отрезке пути (если последняя меньше скорости стабилизации); движение по инерции (выбег); движение по инерции с подтормаживанием на уклоне с максимально допустимой на данном отрезке пути постоянной скоростью; торможение с максимальной интенсивностью.

Для наглядности все возможности выбора, в том числе оптимальные, представлены на рис. 1 в виде квадрата. Из условий оптимальности (и здравого смысла) очевидно, что допустимы только точки, лежащие на левой и нижней границах квадрата, обозначенных жирными линиями, на которых невозможны одновременно тяга и торможение. Исключением является угловая точка 3, где тяга и торможение равны нулю одновременно.

Режим 1 реализуется при трогании с места и разгоне поезда на участках со сложным профилем пути или при необходимости разгона после выполнения заданного ограничения скорости.

Режим 2 реализуется при движении либо со скоростью стабилизации, либо с максимально допустимой на данном отрезке пути скоростью, если она меньше скорости стабилизации. Следует отметить, что скорость стабилизации — важная интегральная характеристика оптимальной траектории, определяемая в ходе расчета для всего участка движения поезда.

Выбег 3 — наиболее важный с точки зрения непосредственной экономии энергии режим.

Режим 4 реализуется на спусках при достижении и обеспечении последующего движения с максимально допустимой на данном отрезке пути скоростью.

Режим 5 используется перед остановкой поезда или когда необходимо эффективное снижение скорости движения.

Определение последовательности режимов, уровня сил тяги и торможения, скорости стабилизации, а также моментов переключения с одного режима на другой является задачей оптимизационного расчета.

**Основной оптимизационный алгоритм.** Одним из важных элементов оптимизационного расчета является метод последовательных приближений для задач оптимального управления с ограничениями на фазовые переменные, предложенный в работах [15, 16]. В этом методе для оценки изменения функционала при малых вариациях управления предложено выражение, расширяющее возможности применения для новых условий задачи (4) — (11) известной формулы Л. И. Розоноэра [19].

Применительно к поставленной задаче (4) — (11) далее рассматриваются основные этапы решения.

Пусть  $\mathbf{u}_0(s) = (u_{T0}(s), u_{B0}(s))$  и  $\mathbf{z}_0(s) = (J_0(s), t_0(s), K_0(s))$ ,  $0 \leq s \leq S$  — допустимые по ограничениям задачи (4) — (10) вектор-функции управления и фазовых координат соответственно. По аналогии с задачами на условный экстремум запишем функционал Лагранжа для равенств (6) — (10) в виде

$$\begin{aligned}
 L(\mathbf{p}, \mu, \mathbf{z}_0) = & J_0(S) + \\
 & + \int_0^s \left( p_J(s) \left( u_T(s) U_{T\max}(K(s)) - \frac{dJ_0(s)}{ds} \right) \right) ds + \\
 & + p_T(s) \left( \frac{1}{K_0(s)} \right)^{\frac{1}{2}} - \frac{dt_0(s)}{ds} + \\
 & + p_K(s) \left( 2(-W(s, K_0(s)) + u_{T0}(s) U_{T\max}(K_0(s)) - \right. \\
 & \left. - u_{B0}(s) U_{B\max}(K_0(s) - \frac{dK_0(s)}{ds}) \right) ds + \\
 & + \int_0^s (K_0(s) - E(s)) d\mu(s) + \\
 & + \lambda_T(t(S) - T) + \lambda_K(K(S) - K_T), \tag{12}
 \end{aligned}$$

где  $\mathbf{p}(s) = (p_J(s), p_T(s), p_K(s))$  — вектор-функция с компонентами — множителями Лагранжа для равенств (4) — (6);  $\lambda_T$  и  $\lambda_K$  — множители Лагранжа, обеспечивающие в условии (8) заданные время хода и значение конечной скорости соответственно, а  $\mu(s)$  — функция-множитель Лагранжа, отвечающая за ограничение (10). При этом

$$d\mu(s) = 0, \text{ если } K_0(s) - E(s) < 0, 0 \leq s \leq S. \tag{13}$$

Поскольку  $\mathbf{u}_0(s)$  и  $\mathbf{z}_0(s)$  удовлетворяют всем ограничениям задачи (6) — (10), то для любой пары функций  $\mathbf{p}(s)$  и  $\mu(s)$ , в которой  $\mu(s)$  удовлетворяет условию (13), и любых  $\lambda_T$  и  $\lambda_K$  верно соотношение

$$L(\mathbf{p}, \mu, \mathbf{z}_0) = I_0 = J_0(S). \quad (14)$$

Выбираем новую пару  $\mathbf{u}_1(s), \mathbf{z}_1(s)$ , допустимую по всем ограничениям (4) – (10) и, кроме того, удовлетворяющую условию

$$\int_0^s \delta K(s) d\mu(s) = 0, \quad (15)$$

где  $\delta K(s) = K_1(s) - K_0(s)$ .

Тогда для тех же  $\mathbf{p}(s)$  и  $\mu(s)$ , что и в (14), имеем

$$\begin{aligned} \delta L &= \delta I, \text{ где } \delta L = L(\mathbf{p}, \mu, \mathbf{z}_1) - L(\mathbf{p}, \mu, \mathbf{z}_0), \\ \delta I &= J_1(S) - J_0(S). \end{aligned} \quad (16)$$

Воспользуемся произволом в выборе  $\mathbf{p}, \mu, \lambda_T$  и  $\lambda_K$  для получения искомой оценки изменения функционала  $I$  по сравнению с его значением на допустимом решении  $\mathbf{u}_0(s), \mathbf{z}_0(s)$ . Пусть  $\delta \mathbf{u}(s, \varepsilon) = \mathbf{u}_1(s, \varepsilon) - \mathbf{u}_0(s) -$  вариация управления, зависящая от малого параметра  $\varepsilon$ , такая, что

$$\int_0^s (|\delta u_T(s, \varepsilon)| + |\delta u_B(s, \varepsilon)|) ds \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

а  $\delta \mathbf{z}(s, \varepsilon) = \mathbf{z}_1(s, \varepsilon) - \mathbf{z}_0(s) -$  изменение фазовой переменной, вызванное вариацией управления  $\delta \mathbf{u}(s, \varepsilon)$ . Выбираем в качестве  $\mathbf{p}, \mu, \lambda_T$  и  $\lambda_K$  вектор-функцию  $\mathbf{p}_0(s) = (p_{j_0}(s), p_{T_0}(s), p_{K_0}(s))$ , функцию  $\mu_0(s)$  и параметры  $\lambda_{T_0}$  и  $\lambda_{K_0}$ , вычисляемые на исходном решении  $\mathbf{u}_0(s), \mathbf{z}_0(s)$ , удовлетворяющие сопряженной системе уравнений

$$\frac{dp_{j_0}(s)}{ds} = 0; \quad (17)$$

$$\frac{dp_{T_0}(s)}{ds} = 0; \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_{K_0}(s)}{ds} &= u_{T_0}(s)(-p_{j_0}(s) - 2p_{K_0}(s)) \frac{dU_{T_{\max}}(K_0(s))}{dK_0(s)} + \\ &+ \frac{p_{T_0}(s)}{2(K_0(s))^{\frac{3}{2}}} + 2p_{K_0}(s) \frac{\partial W(s, K_0(s))}{\partial K_0(s)} + \\ &+ u_{B_0}(s) \frac{dU_{B_{\max}}(K_0(s))}{dK_0(s)} - \frac{d\mu_0(s)}{ds} \end{aligned} \quad (19)$$

с граничными условиями при  $s = S$

$$p_{j_0}(S) = -1, p_{T_0}(S) = \lambda_{T_0}, p_{K_0}(S) = \lambda_{K_0}. \quad (20)$$

Из (17), (18) следует, что  $p_{j_0}(s) \equiv -1, p_{T_0}(s) \equiv \lambda_{T_0}$ , так что в сопряженной системе остается лишь одно уравнение (19) для  $p_{K_0}(s)$  с граничным условием  $p_{K_0}(S) = \lambda_{K_0}$ .

Функция  $\frac{d\mu_0(s)}{ds}$  в (19) отлична от нуля только при  $K_0(s) = E(s)$  в (10), т.е. когда движение происходит со скоростью, равной максимально допустимой, причем величина  $\mu_0(s)$  меняется скачком при входе на ограничение скорости и сходе с него, а функция  $\frac{d\mu_0(s)}{ds}$  является обобщенной функцией (типа  $\delta$ -функции) [6, 7]. Кроме этого,  $d\mu_0(s)$  удовлетворяет условию

$$\int_0^s \delta K(s, \varepsilon) d\mu_0(s) = 0. \quad (21)$$

В силу предположения о допустимости  $\mathbf{z}_1(s, \varepsilon)$  при  $s = S$  выполнены условия

$$\delta t(S, \varepsilon) = 0, \delta K(S, \varepsilon) = 0. \quad (22)$$

Тогда из (16) следует оценка

$$\begin{aligned} \delta I = \delta L &= \int_0^s (H(s, \mathbf{p}_0(s), \mathbf{z}_0(s), \mathbf{u}_0(s) + \delta \mathbf{u}(s, \varepsilon)) - \\ &- H(s, \mathbf{p}_0(s), \mathbf{z}_0(s), \mathbf{u}_0(s))) ds + o(\varepsilon), \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} H(s, \mathbf{p}_0(s), \mathbf{z}_0(s), \mathbf{u}_0(s)) &= -u_T U_{T_{\max}}(K_0(s)) + \\ &+ \frac{\lambda_{T_0}}{(K_0(s))^{\frac{1}{2}}} + 2p_{K_0}(s)(-W(s, K_0(s)) + \\ &+ u_T U_{T_{\max}}(K_0(s)) - u_B U_{B_{\max}}(K_0(s))) \end{aligned}$$

является функцией Гамильтона – Понтрягина, используемой в формулировке принципа максимума [15, 19]. В оценке (23) эта функция при фиксированных  $\mathbf{p}_0(s), \mathbf{z}_0(s)$  является функцией двух переменных – координаты пути  $s$  и управления  $\mathbf{u} = (u_T, u_B)$ , выбираемого в точке  $s$ .

Рассмотрим итерационный шаг перехода от имеющегося допустимого приближения  $\mathbf{u}_0(s), \mathbf{z}_0(s)$  к новому допустимому приближению  $\mathbf{u}_1(s), \mathbf{z}_1(s)$  с меньшим значением функционала  $I$ , предполагая, что вектор-функция  $\mathbf{p}_0(s)$  и  $\mu_0(s)$  известны и удовлетворяют (17) – (23). При этом возможны два случая.

В первом случае для каждой точки  $s$  отрезка  $[0, S]$  управление  $\mathbf{u}_0(s)$  – точка, в которой функция  $H(\dots \mathbf{u}) = H(s, \mathbf{p}_0(s), \mathbf{z}_0(s), \mathbf{u})$  достигает минимума. Тогда для малых вариаций  $\delta \mathbf{u}(s, \varepsilon), \delta \mathbf{z}(s, \varepsilon)$  уменьшить функционал  $I$  в первом порядке относительно  $\varepsilon$  нельзя. Отметим, что условия (21), (22) ограничивают выбор вариаций  $\delta \mathbf{u}(s, \varepsilon)$  и  $\delta \mathbf{z}(s, \varepsilon)$ , однако, как показано в [15], из невозможности улучшить решение на таких вариациях следует принцип максимума для  $-H(\dots \mathbf{u})$ , а  $\mathbf{u}_0(s), \mathbf{z}_0(s)$  обеспечивают оптимальное решение задачи (4) – (10).

Во втором случае на  $[0, S]$  имеются отрезки  $[s^i, s^{i+1}]$ , где на множестве допустимых управлений  $u(s)$  (см. рис. 2) функцию  $H(\dots \mathbf{u})$  можно уменьшить по сравнению с ее значением в исходной точке  $u_0(s)$ .

Покажем, что во втором случае можно построить вариацию управления  $\delta \mathbf{u}(s, \varepsilon)$ , уменьшающую функционал  $I$  в первом порядке относительно малого параметра  $\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Действительно, пусть всюду на одном из отрезков  $[s^i, s^{i+1}]$  точка  $\mathbf{u}_0(s)$  не является минимумом функции  $H(\dots \mathbf{u})$ . Это означает, что найдутся число  $\Delta < 0$  и точки  $\mathbf{u}_1(s) = \mathbf{u}_0(s) + \gamma, s^i \leq s \leq s^{i+1}$ , в которых  $H(\dots \mathbf{u})$  достигает минимума на множестве допустимых управлений  $\mathbf{u}$  (рис. 2), и такие, что  $H(\dots \mathbf{u}_1(s)) - H(\dots \mathbf{u}_0(s)) < \Delta < 0$ . Возьмем вариацию  $\delta \mathbf{u}(s, \varepsilon) = \gamma$  всюду на малом отрезке длиной  $\varepsilon$  внутри  $[s^i, s^{i+1}]$  и  $\delta \mathbf{u}(s, \varepsilon) = 0$  во всех остальных точках отрезка  $[0, S]$ . Тогда из оценки (21) следует, что  $\delta I = \Delta \varepsilon + o(\varepsilon)$

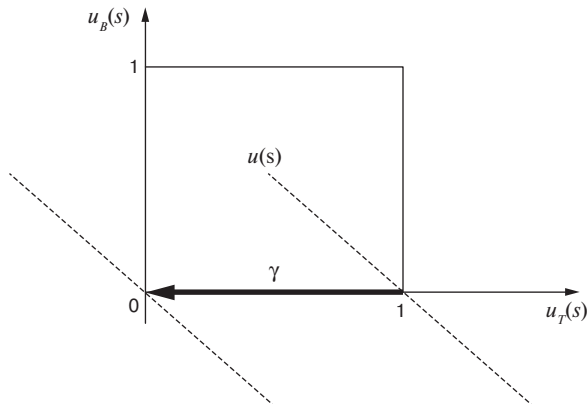


Рис. 2. Схематичное представление достижения минимума функционала на множестве допустимых управлений. Пунктирные линии — линии уровня функции  $H(\dots u)$ . Точка  $(1,0)$  — исходная,  $(0,0)$  — точка минимума

при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , а поскольку  $\Delta < 0$ , то при достаточно малом  $\varepsilon$  изменение функционала  $\delta I < 0$ . Таким образом, строится допустимая вариация управления («иголка»), добавление которой к  $u_0(s)$  дает новую допустимую пару  $u_1(s), z_1(s)$  с меньшим значением функционала  $I$ .

Рассмотрим исходное допустимое приближение  $u_0(s), z_0(s)$ , являющееся последовательностью из пяти возможных режимов. Для построения следующего допустимого приближения с меньшим значением функционала воспользуемся описанным выше способом. Выбираем допустимую вариацию управления в виде набора «иголок» в точках переключения режимов  $s_k$ :

$$\delta \bar{u}(s, \varepsilon) = \begin{cases} -\gamma_k \operatorname{sign} \tau_k(\varepsilon), \min \{s_k, s_k + \tau_k(\varepsilon)\} \leq s \leq \\ \leq \max \{s_k, s_k + \tau_k(\varepsilon)\}; \\ 0 \text{ — в остальных точках.} \end{cases} \quad (24)$$

Здесь  $\lambda_k$  задает скачок по направлению ребра множества  $U_{T_{\max}}(s, z_0(s))$ ,  $\gamma_k = |\mathbf{u}(s_k + 0) - \mathbf{u}(s_k - 0)|$ , знак  $\tau_k(\varepsilon)$  задает направления сдвига переключения, а  $|\tau_k(\varepsilon)|$  — ширина «иголки». Для момента переключения  $s_k$  возможны три случая.

В первом случае слева и справа от точки  $s_k$  функция  $H(\dots u)$  достигает минимума на  $u_0(s)$ . В данном приближении  $s_k$  остается на месте, и  $\tau_k(\varepsilon) = 0$ .

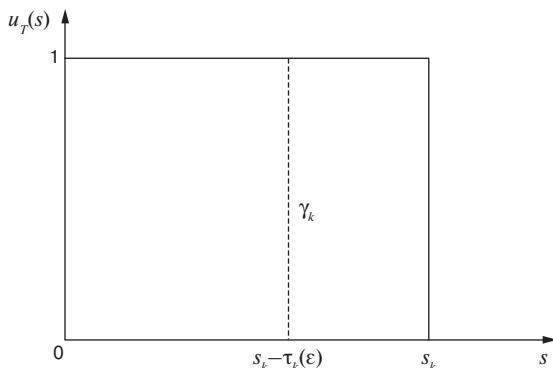


Рис. 3. Схематичное представление сдвига момента переключения (формирование одной из «иголок»)

Во втором случае только слева или только справа от точки  $s_k$  функция  $H(\dots u)$  достигает минимума на  $u_0(s)$ , причем этот минимум сохранится, если соответствующий минимуму режим продолжить за точку  $s_k$  на малый отрезок  $\tau_k(\varepsilon)$ . В данном случае исходный режим на этом отрезке заменяется продолжением соседнего и, таким образом, получается одна из «иголок» в (24). Иными словами, сдвигается момент переключения на величину  $\tau_k(\varepsilon)$ , как показано на рис. 3. Следует отметить, что моменты переключений соседних точек  $s_k$  и  $s_{k+1}$  могут перемещаться навстречу друг другу. В случае их совпадения соответствующий режим исключается из последовательности.

В третьем случае и слева, и справа от точки  $s_k$  функция  $H(\dots u)$  не достигает минимума на  $u_0(s)$ . Тогда возьмем отрезок длиной  $\tau_k(\varepsilon)$ , включающий  $s_k$ , и на этом отрезке найдем минимум  $H(\dots u)$  на множестве  $U$ , тем самым построив «иголку» шириной  $\tau_k(\varepsilon)$  с новым режимом, соответствующим точке минимума (можно считать, что новый режим изначально присутствует на  $u_0(s)$  в точке  $s_k$ , но имеет нулевую длину). В этом случае в последовательности режимов возникнет новый режим.

Для вариации вида (24) из оценки (23) следует, что  $\delta I = K_\varepsilon \varepsilon + o(\varepsilon)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , где  $K_\varepsilon < 0$ , и при достаточно малом  $\varepsilon$  приращение функционала  $\delta I < 0$ .

При описании конструкции вариации  $\delta u(s, \varepsilon)$ ,  $\delta z(s, \varepsilon)$  выше предполагалось, что вектор-функция  $p_0(s)$  и  $\mu_0(s)$  известны и удовлетворяют (17) — (21). В действительности, чтобы найти эти величины, необходимо для исходного приближения  $u_0(s), z_0(s)$  знать множители Лагранжа  $\lambda_{T0}, \lambda_{K0}$  и набор параметров, определяющих функцию  $\mu_0(s)$ . В [15] показано, что такими параметрами являются  $d\mu_0(s_k)$  — величины скачков функции  $\mu_0(s)$  в точках входа и выхода на скоростное ограничение (10). Как указано выше, вне участков движения с максимально допустимой скоростью в (10)  $\mu_0(s)$  — постоянная величина. Для конструкции вариации вида (24) эти параметры определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений.

**Основные составляющие алгоритма оптимизации траектории движения поезда.** На первом этапе осуществляется аппроксимация тяговых характеристик электровозов кусочно-гладкими функциями, для чего используются сплайны 3-го порядка. При этом на каждом гладком куске тяговой характеристики  $F(v)$  выбирается несколько (обычно 3–4) базовых точек ( $v_i, F_i$ ) так, что проведенные через них дуги гладко сопрягающихся между собой кубических парабол обеспечивают заданную точность аппроксимации  $F(v)$ . При многократно возникающей в процессе решения задачи необходимости расчета значения  $F(v)$  по заданной скорости  $v$  вычисления производятся в следующем порядке: на основе алгоритма бинарного поиска определяется интервал базовых точек, содержащий  $v$ , а затем с помощью ранее вычисленных сплайновых

коэффициентов вычисляется значение кубического полинома. Такой подход, как показали численные эксперименты, обеспечивает высокую эффективность и быстродействие расчетов.

Второй этап решения включает основной оптимизационный алгоритм. Переход к следующему шагу итераций от  $\mathbf{u}_0(s), \mathbf{z}_0(s)$  к  $\mathbf{u}_1(s), \mathbf{z}_1(s)$  с допустимым управлением  $\mathbf{u}_1(s)$  и соответствующей траекторией  $\mathbf{z}_1(s)$  реализуется следующей последовательностью действий:

1. Построение системы линейных алгебраических уравнений с ненулевым определителем, из которой находятся множители Лагранжа  $\lambda_{\tau_0}, \lambda_{\kappa_0}$  так, что условия (22) при  $s = S$  удовлетворяются в линейном приближении.

2. Построение системы линейных алгебраических уравнений с ненулевым определителем, из которой находятся  $d\mu_0(s_k)$  — величины скачков функции  $\mu_0(s)$  в точках входа и выхода на скоростное ограничение (10) и строится функция  $\mu_0(s)$ .

3. Решение сопряженного дифференциального уравнения (19) (справа налево по  $s$ ) и нахождение  $p_{\kappa_0}(s)$ .

4. Решение конечномерных задач оптимизации функции Гамильтона — Понтрягина  $H(\dots \mathbf{u})$  на множестве допустимых управлений (9) для каждого момента переключения  $s_k$  и нахождение нового управления  $\mathbf{u}(s, \varepsilon) = \mathbf{u}_0(s) + \delta \mathbf{u}(s, \varepsilon)$ , где  $\delta \mathbf{u}(s, \varepsilon)$  имеет вид (24).

5. Определение из решения системы уравнений (4) — (8) (слева направо по  $s$ ) траектории  $\mathbf{z}_1(s, \varepsilon)$ , выполнение ее правки для обеспечения допустимости, нахождение нового управления  $\mathbf{u}_1(s, \varepsilon)$  и изменения функционала  $\delta I(\varepsilon)$ .

6. Повторение вычислений для обеспечения максимально возможного уменьшения  $\delta I(\varepsilon)$  с уменьшением значения  $\varepsilon$  вдвое на каждом шаге, начиная с  $\varepsilon = 1$ , пока не будет достигнуто приемлемое уменьшение функционала  $\delta I(\varepsilon)$ .

7. Повторение процесса расчетов с заменой исходного приближения  $\mathbf{u}_0(s), \mathbf{z}_0(s)$  на  $\mathbf{u}_1(s), \mathbf{z}_1(s)$ .

Таким образом, на каждом шаге итерации возникают игольчатые вариации, порождаемые набором точек переключения  $s_k$  и сдвигом этих точек на величины  $\tau_k(\varepsilon)$ . В процессе счета, как указывалось выше, может происходить появление новых точек переключения или исчезновение существующих, причем эти ситуации учитываются автоматически. Такой способ построения последовательных приближений обладает тем преимуществом, что для его численной реализации на ЭВМ требуется весьма малый объем оперативной памяти при высоком быстродействии.

**Определение исходной допустимой траектории движения поезда.** Описанный итерационный процесс требует задания на начальном шаге исходной допустимой траектории движения поезда. Для построения такой траектории был разработан специальный алгоритм, основанный на регулировании времени хода [14]. В

этом алгоритме использован класс допустимых траекторий, по структуре схожих с оптимальными траекториями движения поезда. Построенная таким образом допустимая траектория характеризуется наличием выбегов перед торможениями и крутыми спусками, разгонов перед крутыми подъемами, отсутствием при движении с постоянной скоростью  $v = v_*$  подтормаживаний на тех отрезках пути, где величина  $v_*$  строго меньше ограничений по скорости. В результате на вход итерационного процесса в качестве начального подается достаточно хорошее приближение к оптимальному решению, что решающим образом уменьшает число итераций и общее время расчетов.

На рис. 4 представлена блок-схема основного оптимизационного алгоритма.

**Алгоритм интегрирования уравнений движения поезда.** Необходимость интегрирования уравнения движения поезда возникает по ходу работы описанного алгоритма многократно. Поэтому в целях повышения эффективности при его численной реализации для ЭВМ разработан оригинальный алгоритм интегрирования уравнения движения поезда. Согласно этому алгоритму строится специальная функция профиля  $\Gamma(s)$ , зависящая от координаты головы поезда  $s$  и учитывающая неравномерность распределения массы по длине поезда,

$$\Gamma(s) = g \int_0^{L_p} m(\xi) i(s - \xi) d\xi,$$

где  $L_p$  — длина поезда;  $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ ;  $m(\xi)$  — кусочно-постоянная функция, задающая распределение массы по длине поезда;  $i$  — кусочно-постоянная функция уклонов. Ввиду очевидных особенностей подынтегральной функции  $\Gamma(s)$  является кусочно-линейной непрерывной функцией от  $s$ .

Математически задача определения функции  $v(s)$  заключается в решении задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{m_p v dv}{ds} = A + Bv + Cv^2 + \Gamma(s), s_{\text{нач}} < s < s_{\text{кон}}; \\ v(s_{\text{нач}}) = v_{\text{нач}}, \end{cases} \quad (25)$$

где  $m_p$  — масса поезда.

Зависимость правой части (25) от скорости  $v$  в виде многочлена второй степени с постоянными коэффициентами обусловлена характером формул Правил тяговых расчетов для основного сопротивления и принятой аппроксимацией тяговых характеристик непрерывными кусочно-гладкими функциями. На каждом шаге итераций решается уравнение с разделяющимися переменными  $\frac{m_p v dv}{ds} = A_k + B_k v + C_k v^2$ , где  $A_k, B_k$  и  $C_k$  — постоянные, определяемые из условия наилучшего среднеквадратичного приближения правой части (25) квадратным трехчленом от  $v$  на аналитической функции-решении  $s = s_{k-1}(v; A_{k-1}, B_{k-1}, C_{k-1})$  с предыдущего шага итераций,  $k = 1, 2, 3, 4$ . На начальном

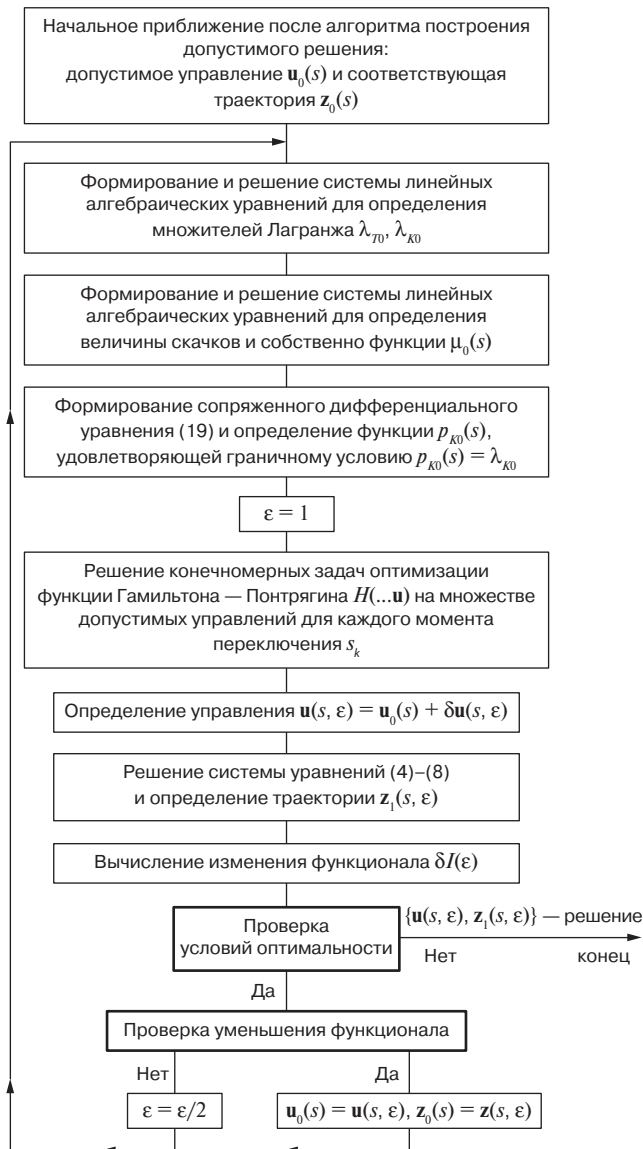


Рис. 4. Блок-схема основного оптимизационного алгоритма

шаге ( $k = 0$ ) производится осреднение  $\Gamma(s)$  на интервале  $(s_{\text{нач}}, s_{\text{кон}})$ . Таким образом, на каждом шаге итераций вычисления функции-решения  $s = s_k(v; A_k, B_k, C_k)$  производятся по одним и тем же аналитическим формулам при различных значениях коэффициентов  $A_k, B_k$  и  $C_k$ , что обуславливает высокую эффективность данного алгоритма, так как заданная точность достигается на относительно малом количестве шагов итераций. Численные эксперименты показали, что целесообразное количество таких шагов равно 4. В случае когда на четырех шагах итераций данный алгоритм не обеспечивает требуемой точности, расчет осуществляется на основе стандартного метода Рунге — Кутты 4-го порядка.

**Реализация оптимального управления при использовании локомотивов с дискретными тяговыми характеристиками.** После решения задачи оптимизации и определения энергооптимального режима управления

движением поезда для практического использования полученного непрерывного управления необходимо такой подбор дискретных позиций контроллера машины, который обеспечит минимальное количество таких позиций контроллера и точек их переключения, при которых в сравнении с движением в тяге со скоростью стабилизации —  $v_*$  увеличение расхода энергии не превысит малой наперед заданной величины, а также будут сохранены время движения поезда по участку и значения скоростей на концах рассматриваемого отрезка пути.

В разработанном для решения этой задачи алгоритме используется следующая доказанная нами оценка увеличения расхода энергии  $A$  по сравнению с энергией  $A_*$ , затрачиваемой при движении в тяге с постоянной скоростью стабилизации  $v = v_*$  на отрезке пути от  $s_0$  до  $s_1$ :

$$\frac{A}{A_*} - 1 < \frac{K(v_*)}{s_1 - s_0} \int_{s_0}^{s_1} \Delta^2(s) ds, \quad (26)$$

где  $\Delta = \frac{v}{v_*} - 1$ ;  $K(v_*) = \frac{A_1 v_* + 3A_2 v_*^2}{A_0 + A_1 v_* + A_2 v_*^2}$  — безразмерный коэффициент;  $A_i (i = 0, 1, 2)$  — коэффициенты квадратного трехчлена, выражающего зависимость основного сопротивления движению поезда от скорости.

Оценка (26) показывает, что относительное увеличение расхода энергии  $\left(\frac{A}{A_*} - 1\right)$  на порядок меньше величины  $|\Delta|$ .

Для фиксированного числа точек переключения контроллера  $N$  задача аппроксимации непрерывного управления с помощью дискретных тяговых позиций после линеаризации силы тяги  $F(v) \approx F_n(v_*) - F'(v_*) \Delta v_*$  в пределах интервала  $1 - \Delta \leq \frac{v}{v_*} \leq 1 + \Delta$ , отбрасывания

членов более высокого относительно  $\Delta$  порядка и использования оценки (26) сведена к рекуррентной последовательности задач по определению точек переключения режимов  $s_1, \dots, s_N$  и значения расхода энергии на тягу. Если найденное таким образом превышение расхода энергии больше заданной величины, то переходим от  $N$  к  $N + 1$ , и вся процедура повторяется. Следует отметить, что решаемая на каждом шаге задача сведена к классической задаче вариационного исчисления по определению минимума функции  $N$  переменных  $s_1, \dots, s_N$ , что позволило использовать стандартный метод множителей Лагранжа.

**Программная реализация.** Для широкого промышленного использования на сети железных дорог РФ на основе рассмотренных алгоритмов расчета энергооптимальных траекторий движения был разработан программный продукт «Энергооптимальный тяговый расчет» (ЭТР). ЭТР ориентирован на использование в ПЭВМ с процессором Intel Pentium, стандартным набо-



ром периферийных устройств и операционных систем семейства Windows, наиболее распространенных в РФ.

Базовые алгоритмы, заложенные в качестве основы программы ЭТР, и качество программной реализации обеспечивают расчет энергетически оптимального режима управления поездом для участков длиной 150 – 300 км на ПЭВМ (Pentium 4, 1,7 ГГц) за время порядка 3 – 12 с в зависимости от сложности профиля и совокупности ограничений на скорость движения поезда. Заложенные в программную реализацию ЭТР многочисленные оптимизированные проверки исходной информации и промежуточных результатов счета обеспечивают высокую степень устойчивости и безотказности работы программы.

Для повторного использования исходных данных при выполнении вариантных расчетов в программе ЭТР реализована поддержка интегрированной базы данных. ЭТР имеет интегрированную справочно-информационную систему, которая включает в себя электронное руководство пользователя, контекстно-зависимую справку по всем элементам пользовательского интерфейса, предметный указатель слов и выражений, а также механизм быстрого поиска по запросу. Как показал опыт внедрения, наличие такой справочно-информационной системы и соответствие стандартам пользовательского интерфейса обеспечивают освоение и успешную работу с программой ЭТР. На рис. 5 представлена схема общей организации работы программы ЭТР.

Использование объектно-ориентированного подхода к организации программного обеспечения, а также высокий уровень структурированности и инкапсуляции составляющих модулей обеспечили возможность органического объединения энергооптимальных расчетных модулей с другими подсистемами, в частности с системами автоведения.

**Опытная проверка.** Теоретические оценки эффективности энергооптимальных траекторий движения поезда были проверены в ходе специальных опытных поездок на участках постоянного и переменного тока Московской и Горьковской железных дорог. Для повышения точности и достоверности результатов при проведении испытаний использовался динамометрический вагон-лаборатория ВНИИЖТ, оборудованный средствами измерения и регистрации электрических параметров в силовых цепях локомотива, а также реализованных скоростей движения. При этом экспериментально полученные результаты расхода электроэнергии сопоставлялись с данными энергооптимальных тяговых расчетов.

В результате у машинистов, управлявших локомотивами в соответствии с рассчитанными с помощью ЭТР режимами, при аналогичных условиях движения с поездами такой же массы на том же участке железной дороги расход энергии на тягу по сравнению с поездками без рекомендаций ЭТР снизился на 5 – 10%.

Было подтверждено, что снижение расхода энергии на тягу поездов при использовании энергооптимальных траекторий движения определялось заметным увеличением времени езды по инерции и небольшим перераспределением общего времени хода при движении по перегонам.

Эффективность использования рассчитанных с помощью ЭТР энергооптимальных траекторий проверялась на Юго-Восточной, Октябрьской, Южно-Уральской, Западно-Сибирской и Забайкальской железных дорогах. В этих поездках, осуществляемых в условиях реальной эксплуатации, снижение расхода электроэнергии на тягу составляло 3 – 14%.

**Практическое использование.** В настоящее время использование рассчитанных с помощью ЭТР энергооптимальных траекторий движения поездов нашло практическое применение в большинстве локомотивных депо сети железных дорог РФ и обеспечило при этом существенную экономию энергоресурсов на тягу поездов.

Программа ЭТР используется для обучения машинистов локомотивных депо приемам энергосберегающего управления движением поезда, для составления энергетически выгодных и безопасных по продольной динамике режимных карт [20].

Базовый расчетный модуль программы ЭТР используется в бортовых системах автоведения для пассажирских (электровозы ЧС7, ЧС2, ЧС200) и грузовых (электровозы ВЛ10, ВЛ80) поездов, а также в системах управления распределенной по составу поезда тягой [21, 22]. В отличие от стационарной программы ЭТР, расчет и реализация энергооптимальных траекторий на борту осуществляется в реальном времени в зависимости от постоянно меняющейся поездной обстановки с учетом постоянных и временных ограничений скорости, сигналов светофоров, условий проезда каждого конкретного участка, а также многих других факторов. Опыт использования бортовой программы ЭТР в системах автоведения подтвердил ее соответствие требованиям, предъявляемым к программному обеспечению бортовых систем реального времени.

Для решения задач учета, анализа и нормирования энергозатрат на тягу поездов в ОАО «ВНИИЖТ» разработана автоматизированная система по нормированию, анализу, учету и контролю за расходом ТЭР

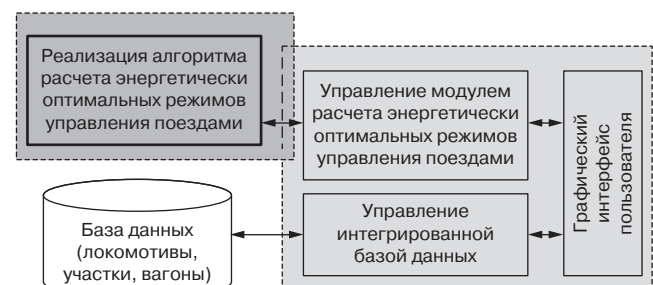


Рис. 5. Структурная схема организации работы программы ЭТР

на тягу поездов — АРМТ. Основу программного обеспечения системы составляет модуль расчета энергооптимальных траекторий движения поезда.

Система АРМТ была установлена в 94 локомотивных депо железных дорог РФ. Опыт эксплуатации системы показал, что расчетный модуль ЭТР обеспечивает в рамках системы АРМТ возможность технически и технологически обоснованно подходить к нормированию энергозатрат на тягу поездов.

**Выводы.** Рассмотренная математическая модель и методы расчета энергооптимальных траекторий между пунктами начала и конца движения за заданное время с учетом плана и профиля пути, длины состава, характеристик вагонов, тяговых и тормозных характеристик локомотива, ограничений скорости движения обеспечивают существенную, на уровне 4 — 6% экономию топлива и энергии на тягу поездов.

Разработанная на этой основе численная реализация в виде расчетных модулей для ЭВМ позволяет использовать расчеты энергооптимальных траекторий для обучения машинистов приемам энергосберегающего управления движением поезда, для нормирования расхода топлива на тягу с учетом реальных условий пропуск поездопотоков, для разработки режимных карт.

Расчетные модули эффективны в системах автоведения при определении энергоэффективных, безопасных по продольной динамике режимов управления поездами повышенной массы и длины.

Весьма перспективным оказалось использование методов оптимизации затрат энергии на тягу поездов и созданных на их основе программных средств при разработке энергооптимальных графиков движения как пассажирских, так и грузовых поездов на железных дорогах РФ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ichikawa K. Application of optimization theory for bounded state variable problems to the operation train. Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers, 1968, v.11, №47, pp. 857 — 865.
2. Максимов В. М. Оптимальное управление при автоматическом ведении поезда метрополитена // Тр. МИИТ, вып. 338. М., 1971. С. 82 — 92.
3. Почаевец Э. С. Исследование оптимального тягового режима электроподвижного состава // Тр. МИИТ, вып. 282. М., 1967. С. 52 — 65.
4. Головичер Я. М. Энергетически оптимальный алгоритм управления для систем автоведения поезда // Вестник ВНИИЖТ. 1982. № 8. С. 18 — 22.
5. Strobel, H. u. P. Horn: Zur energieoptimalen Steuerung der Translationsbewegung von Fahrzeugen bei Beschränkungen im Zustandsraum (Kurzfassung eines Beitrages zum Fachkolloquium Informationstechnik an der Tu Dresden vom 12. bis 14. Jan. 1972). Zschr. elektr. Inform.- und Energietechnik, 3 (1973) H. 6, S.304 — 308.
6. Аснис И. А., Дмитрук А. В., Осмоловский Н. П. Решение с помощью принципа максимума задачи об энергетически оптимальном управлении движением поезда // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1985. Т. 25. №11. С. 1644 — 1656.
7. Микропроцессорные системы автоведения электроподвижного состава/Л. А. Баранов [и др.]. М.: Транспорт, 1990. 272 с.

8. Coleman D., Yee R., P. Pudney. Saving fuel on long-haul trains: Australian stage 2 trial results, ИННА, Rio de Janeiro, 2005, pp. 1 — 5.

9. Benjamin B., Howlett P., Pudney P. and Vu X. Freightmaster: optimal speed profiles for long haul trains. Proceedings of the 10th International Conference in Applications of Advanced Technologies in Transportation, 27 — 30 May, 2008, Athens, Greece.

10. Leander P., Lagos M., Karlsson M., Rydberg S. Computer aided train operation, САО, ИННА, Kiruna, 2007, pp. 423 — 432.

11. Hout P. K., Bonanni P. G., Chan D. S., Chandra R. S. Kalyanam K. Optimal Control of Heavy-Haul Freight Trains to Save Fuel. University of California at Santa Barbara, Winter 2009 Seminar.

12. Управляющая бортовая программа автоведения поездов, реализующая энергооптимальную траекторию движения (УСАВПП): авт. свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ. №2003611102 / Л. А. Мугинштейн [и др.] Май. 2003.

13. Управляющая бортовая программа автоведения грузовых электровозов постоянного тока с дискретным управлением, реализующая энергооптимальную траекторию движения (УСАВПГ): авт. свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ. № 2003612179 / Л. А. Мугинштейн [и др.] // Сентябрь. 2003.

14. Мугинштейн Л. А., Илютович А. Е., Ябко И. А. Энергооптимальные методы управления движением поездов // Сб. науч. тр. ОАО «ВНИИЖТ». М.: Интекст, 2012. 80 с.

15. Оптимальное управление в линейных системах / А. А. Милютин [и др.]. М.: Наука, 1993. 268 с.

16. Илютович А. Е. Выбор вариации спуска в задаче оптимального управления со смешанными ограничениями. Декомпозиционный подход // Автоматика и телемеханика, 1989. №9. С. 103 — 114.

17. P. Pudney, P. Howlett. Optimal driving strategies for a train journey with speed limits, J. Australian Math. Soc., Ser. B, vol. 36, no. 1, pp. 38 — 49, 1994.

18. Н. Н. Hoang, M. P. Polis, A. Haurie. Reducing energy consumption through trajectory optimization for a metro network. IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-20, pp. 590 — 595, 1975.

19. Розоноэр Л. И. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем, I, II. // Автоматика и телемеханика. 1959. Т. 20, № 10, 11. С. 1320 — 1334, 1441 — 1458.

20. Мугинштейн Л. А., Ябко И. А. Метод анализа продольно-динамических сил в грузовых поездах большой массы и длины // Железные дороги мира. 2003. № 2. С. 43 — 48.

21. Аппаратно-программный комплекс для моделирования расчета траекторий движения поездов с распределенной тягой и обучения машинистов энергооптимальным и безопасным приемам управления локомотивами в таких поездах: авт. свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ. №2004612209/ Л. А. Мугинштейн, И. А. Ябко, С. И. Лисеев. 2004.

22. Мугинштейн Л. А., Кобзев С. А., Ябко И. А. Расчет продольно-динамических сил в грузовых поездах с распределенной тягой // Железнодорожный транспорт. 2009. №2. С. 26 — 30.

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**МУГИНШТЕЙН Лев Александрович**, главный научный сотрудник, ОАО «ВНИИЖТ». 107996, Москва, 3-я Мытищинская ул., д. 10. Тел.: (499) 260-41-16.

**ИЛЮТОВИЧ Александр Ехельевич**, д-р техн. наук. Тел.: +201 302-99-44. E-mail: alex.ilyutovich@gmail.com

**ЯБКО Израиль Аврумович**, ведущий научный сотрудник, ОАО «ВНИИЖТ». 107996, Москва, 3-я Мытищинская ул., д. 10. Тел.: (499) 260-41-25. E-mail: che@vniizht.ru

## Mimumum Energy Consumption Based Train Performance Calculation

**Lev A. Muginshtein**, Dr. of Technical Science, Professor, Head Research Worker, JSC Railway Research Institute (JSC VNIIZhT), 10, 3rd Mytischinskaya str., 107996 Moscow, Russian Federation. Tel.: +7 (499) 260 4116

**Alexander Ye. Ilyutovich**, Dr. of Technical Science. Tel.: +201 302 9944. E-mail: alex.ilyutovich@gmail.com

**Israel A. Yabko**, Candidate of Technical Science, Leading Research Worker, JSC VNIIZhT, JSC Railway Research Institute (JSC VNIIZhT), 10, 3rd Mytischinskaya str., 107996 Moscow, Russian Federation. Tel.: +7 (499) 260 4125. E-mail: che@vniizht.ru

**Abstract.** Optimization of train control modes proves to be one of the most important measures in the context of saving fuel and energy consumption by trains' traction power (being a pressing problem nowadays). The paper represents mathematical model and calculation technique of energy optimal train performance in terms of prescribed running time between the two points and with provision for such variables as track profile and alignment, length of train consist, specification and performance of train cars, haulage and braking performance of locomotives and running speed restrictions. Analysis of experimental data obtained in the purpose-organized trial runs on the DC and AC electrified railway sections as well as in comparative runs conducted in actual train flow passing environment have indicated that such calculation technique ensures considerable traction energy saving.

Algorithms and calculation techniques of energy optimal train trajectories discussed in the paper meet with high efficiency, reliability and versatility standards (up to the requirements on the side of on-board systems forced to perform respective calculations and implement their results on the real-time basis in terms of the train flow passing dynamic environment).

Also under discussion is management issue of the designed computer software product basing on the developed calculation algorithms of energy optimal train trajectories. Now this product is a frequent practice on the JSC RZD network as being involved in train drivers training in the part of energy saving driving strategy, regulation of traction fuel consumption with allowance for actual train flow handling environment and development of parameter charts. It's also employed by automatic train control systems.

**Keywords:** optimality; train performance calculation; traction energy consumption; algorithm; energy functional; computer software

### References

1. Ichikawa K. *Application of optimization theory for bounded state variable problems to the operation train*. Bulletin of the Japan Society of Mechanical Engineers, 1968, vol. 11, no. 47, pp. 857 – 865.
2. Maksimov V.M. *Optimal'noe upravlenie pri avtomaticheskoy vedenii poezda metropolitena* [Optimal control of the automatic run of subway trains]. Trudy MIIT [Proc. Moscow Institute of Transportation Engineers], 1971, no. 338, pp. 82 – 92.
3. Pochaevevs E.S. *Issledovanie optimal'nogo tyagovogo rezhima elektropodvizhnogo sostava* [Investigation of optimal traction mode of electric rolling stock]. Trudy MIIT [Proc. Moscow Institute of Transportation Engineers], 1971, no. 338, pp. 52 – 65.
4. Golovicher Ya.M. *Energeticheski optimal'nyy algoritm upravleniya dlya sistem avtovedeniya poezda* [Energetically optimal control algorithm for the train automatic driving systems]. Vestnik VNIIZhT [Vestnik of the Railway Research Institute], 1982, no. 8, pp. 18 – 22.
5. Strobel H., Horn P. *Zur energieoptimalen Steuerung der Translationsbewegung von Fahrzeugen bei Beschränkungen im Zustandsraum* (Kurzfassung eines Beitrages zum Fachkolloquium Informationstechnik an der Tu Dresden vom 12. bis 14. Jan. 1972) [Energy-optimal control of the translational motion of vehicles at restrictions in state space (Summary of a contribution to the Colloquium on Information Technology, Dresden, Jan. 12 – 14, 1972)]. Zeitschrift für elektrische Informations- und Energietechnik, 1973, vol. 3, no. 6, pp. 304 – 308.
6. Asnis I.A., Dmitruk A.V., Osmolovskiy N.P. *Reshenie s pomoshch'yu printsipa maksimuma zadachi ob energeticheski optimal'nom upravlenii dvizheniem poezda* [Solution using the maximum principle of the problem of energy optimal control of train movement]. Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1985, vol. 25, no. 11, pp. 1644 – 1656.

7. Baranov L.A., Golovicher Ya.M., Erofeev E.V., Maksimov V.M. *Mikroprotsessornye sistemy avtovedeniya elektropodvizhnogo sostava* [Microprocessor automatic driving systems of electric rolling stock]. Moscow, Transport Publ., 1990. 272 p.

8. Coleman D., Yee R., Pudney P. *Saving fuel on long-haul trains: Australian stage 2 trial results*. Rio de Janeiro, IHH, 2005, pp. 1 – 15.

9. Benjamin B., Howlett P., Pudney P., Vu X. *Freightmaster: Optimal speed profiles for long haul trains*. Proc. 10th Int. Conf. on Applications of Advanced Technologies in Transportation, Athens, Greece, May 27 – 30, 2008, pp. 3893 – 3904.

10. Leander P., Lagos M., Karlsson M., Rydberg S. *Computer aided train operation*, CATO. Kiruna, IHH, 2007, pp. 423 – 432.

11. Haupt P.K., Bonanni P.G., Chan D.S., Chandra R.S., Kalyanam K. *Optimal Control of Heavy-Haul Freight Trains to Save Fuel*. Seminar. Santa Barbara, University of California at Santa Barbara, Winter 2009.

12. Muginshtein L.A., e.a. *The control board program of automatic train driving implementing energy optimal motion trajectory*. Author's certificate of official registration of computer program № 2003611102. May 2003. (in Russ.)

13. Muginshtein L.A., e.a. *The control board program of automatic driving of DC freight locomotives with discrete control implementing energy optimal motion trajectory*. Author's certificate of official registration of computer program № 2003612179. September 2003. (in Russ.)

14. Muginshtein L.A., Ilyutovich A.E., Yabko I.A. *Energo-optimal'nye metody upravleniya dvizheniem poezdov* [Energy optimal methods of train control]. Sb. nach. tr. OAO "VNIIZhT" [Coll. of sci. works of JSC "VNIIZhT" (Railway Research Institute)]. Moscow, Intext Publ., 2012. 80 p.

15. Milyutin A.A., Ilyutovich A.E., Osmolovskiy N.P., Chukanov S.V. *Optimal'noe upravlenie v lineynykh sistemakh* [Optimal control in linear systems]. Moscow, Nauka Publ., 1993. 268 p.

16. Ilyutovich A.E. *Vybor variatsii spуска v zadache optimal'nogo upravleniya so smeshannymi ogranicheniyami. Dekompozitsionnyy podkhod* [Selecting descent variations in the problem of optimal control with mixed constraints. Decomposition approach]. Avtomatika i telemekhanika, 1989, no. 9, pp. 103 – 114.

17. Pudney P., Howlett P. *Optimal driving strategies for a train journey with speed limits*. Journal of the Australian Mathematical Society, Ser. B, 1994, vol. 36, no. 1, pp. 38 – 49.

18. Hoang H.H., Polis M.P., Haurie A. *Reducing energy consumption through trajectory optimization for a metro network*. IEEE Transactions on Automatic Control, 1975, vol. AC-20, pp. 590 – 595. DOI: 10.1109/TAC.1975.1101058.

19. Rozonoer L.I. *Printsip maksimuma L. S. Pontryagina v teorii optimal'nykh sistem* [L. S. Pontryagin's maximum principle in the theory of optimal systems]. Avtomatika i telemekhanika, 1959, vol. 20, no. 10 – 11, pp. 1320 – 1334, 1441 – 1458.

20. Muginshtein L.A., Yabko I.A. *Metod analiza prodol'no-dinamicheskikh sil v gruzovykh poezdakh bol'shoy massy i dliny* [Analysis method of longitudinal dynamic forces in freight trains with large mass and length]. Zheleznyye dorogi mira, 2003, no. 2, pp. 43 – 48.

21. Muginshtein L.A., Yabko I.A., Liseev S.I. *Hardware-software system for simulation the trajectories calculation of the trains with distributed traction, and training motormen the energy optimal and safe methods of locomotives control*. Author's certificate of official registration of computer program № 2004612209. 2004. (in Russ.)

22. Muginshtein L.A., Kobzev S.A., Yabko I.A. *Raschet prodol'no-dinamicheskikh sil v gruzovykh poezdakh s raspredelennoy tyagoy* [Calculation of longitudinal dynamic forces in freight trains with distributed traction]. Zheleznodorozhnyy transport, 2009, no. 2, pp. 26 – 30.